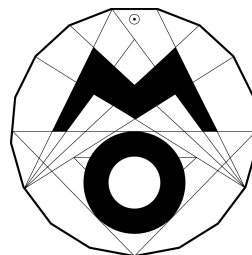


54. matemaatikaolümpiaad
2. voor (piirkonnavoor)
11. ja 12. olümpiaadiklass
Ülesanded



© 2014 Matemaatikaolümpiaadide ülesannetekomitee
www.mathematik-olympiaden.de. Kõik õigused kaitstud.

Juhis: Lahenduskäik koos põhjenduste ja arvutustega peab olema selgesti äratuntav ning esitatud loogiliselt ja grammatiliselt korrektsete lausetega. Lahenduses kasutatud väited tuleb tõestada, kui nad ei ole koolist tuntud. Tõestusest võib lisaks loobuda ka juhul, kui väitel on omaette nimi ning teda võib lugeda üldtuntuks.

541221

Iga reaalarvu a jaoks leida kõik reaalarvupaarid (x, y) , mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$|x - y| + x = 1, \quad (1)$$

$$x + y = a. \quad (2)$$

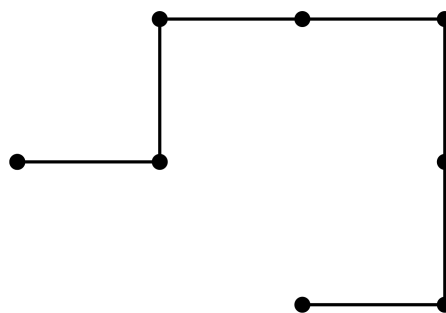
541222

Tasandiline *voltmadu* on ahel, mis koosneb lõikudest pikkusega 1, kus lõigud on otspunktides üksteisega liikuvalt ühendatud. Iga kaks järjestikust lõiku on kas paralleelsed või risti teineteisega ning kõik ühenduskohad (mille hulka loetakse ka ahela mõlemad otspunktid) peavad olema üksteisest erinevad.

Joonis A 541222 kujutab ühte voltmadu pikkusega 7.

Tsirkusetalitaja Zizero tahab sulgeda voltmao ringikujulisse puuri raadiusega 3 nii, et madu jääks terve-nisti puuri sisemusesse või äärelle ning mao pea (ahela üks ots) asuks puuri keskpunktis.

Leida niisuguse voltmao maksimaalne pikkus, kelle Zizero saab puuri ära paigutada.



A 541222

Jätkub järgmisel leheküljel!

541223

Ruudu $ABCD$ külgedel \overline{BC} ja \overline{CD} asuvad vastavalt punktid E ja F .

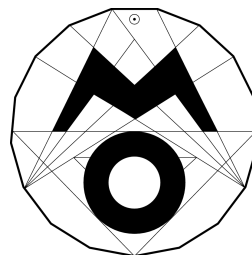
Tõestada: kui punktid A , E ja F on võrdkülgse kolmnurga tipud, siis on kolmnurkade ABE ja AFD pindalade summa võrdne kolmnurga ECF pindalaga.

541224

Uurida, millise positiivsete täisarvude n jaoks leiduvad positiivsed täisarvud a_1, a_2, \dots, a_n , millest ükski kaks ei ole võrdsed ja mille puhul kehtib

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

54. matemaatikaolümpiaad
2. voor (piirkonnavor)
11. ja 12. olümpiaadiklass
Lahendused



© 2014 Matemaatikaolümpiaadide ülesannetekomitee
www.mathematik-olympiaden.de. Kõik õigused kaitstud.

541221 lahendus

10 punkti

Esimene lahendus. Eeldame, et arvud x ja y rahuldavad võrrandisüsteemi. Siis võib eristada kahte juhtu.

- 1. juht:* $x \leq y$. Siis on $|x - y| = y - x$ ning me saame lahendi $y = 1$ ja $x = a - 1$. Eeldus $x \leq y$ on selle lahendipaari jaoks täidetud parajasti siis, kui $a \leq 2$.
- 2. juht:* $x > y$. Võrdusest $|x - y| = x - y$ järeldeb siis $y = 2x - 1$. Asendades selle teise võrrandisse, saame $3x - 1 = a$, seega $x = \frac{a + 1}{3}$. Võrdusest $y = 2x - 1$ saame juurdekuuluva väärtuse $y = \frac{2a - 1}{3}$. Eeldus $x > y$ ehk võrratus $\frac{a + 1}{3} > \frac{2a - 1}{3}$ on nüüd samaväärne võrratusega $a < 2$.

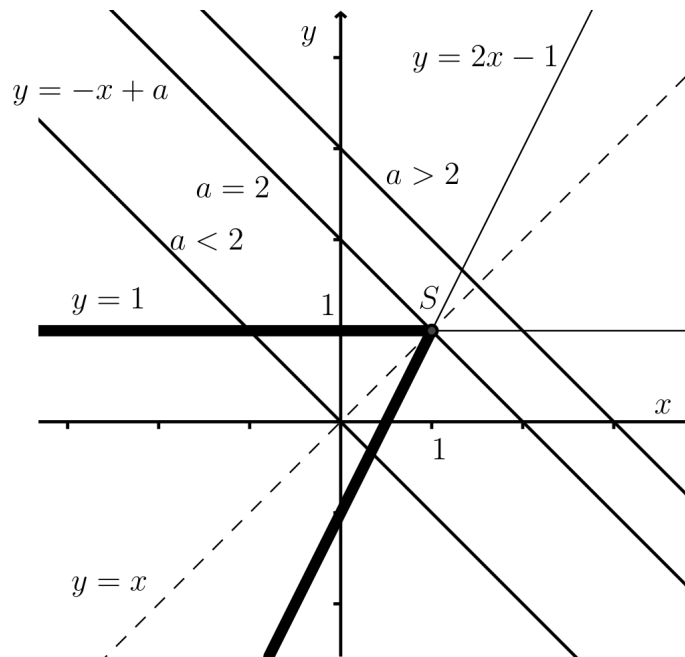
See juhtude vaatlus on ammendav, sellega on kõik võimalikud lahendid leitud.

Kokkuvõte:

Kui $a < 2$, siis on kaks võimalikku lahendit, $(x_1, y_1) = (a - 1, 1)$,
 $(x_2, y_2) = \left(\frac{a + 1}{3}, \frac{2a - 1}{3}\right)$.
Kui $a = 2$, siis on üks võimalik lahend, $(x_1, y_1) = (1, 1)$.
Kui $a > 2$, siis lahendeid pole.

Kontroll kinnitab, et leitud lahendid on õiged.

Teine lahendus.



L 541221

Võrrandisüsteemi lahendid on saadavad kui selliste punktide koordinaadid, mis rahuldavad nii võrrandit (1) kui ka võrrandit (2).

1. juht: $x \leq y$. Siis on $|x - y| = y - x$ ning me saame $y = 1$. Seose $x \leq y$ tõttu rahuldavad tingimust (1) sirge $y = 1$ nende punktide koordinaadid, mis ei asu sirgest $y = x$ paremal.
2. juht: $x > y$. Võrdusest $|x - y| = x - y$ jäeldub siis $y = 2x - 1$. Seose $x > y$ tõttu rahuldavad tingimust (1) sirge $y = 2x - 1$ nende punktide koordinaadid, mis asuvad sirgest $y = x$ paremal.

Et see juhtude vaatlus on ammendav, rahuldavad tingimust (1) parajasti joonisel L 541221 paksult märgitud nurga punktide koordinaadid.

Vaadeldes tingimuses (2) muutujat a parameetrina, esitab tingimus (2) paralleelsete sirgete kimpu tõusuga -1 .

Kui $a > 2$, siis pole selle kimbu sirgetel nurgaga ühised punkte, seetõttu juhul $a > 2$ võrrandisüsteemil lahendid puuduvad.

Kui $a = 2$, siis on sirgel $y = -x + a$ nurgaga ühine parajasti tipupunkt $S(1, 1)$. Seega kui $a = 2$, siis moodustavad $x = 1$ ja $y = 1$ võrrandisüsteemi ainsa võimaliku lahendi.

Kui $a < 2$, siis on selle kimbu sirgetel nurgaga täpselt kaks ühist punkt, mille koordinaadid saame kahe võrrandisüsteemi

$$\begin{array}{ccc} y = 1, & & y = 2x - 1, \\ x + y = a & \text{ja} & x + y = a \end{array}$$

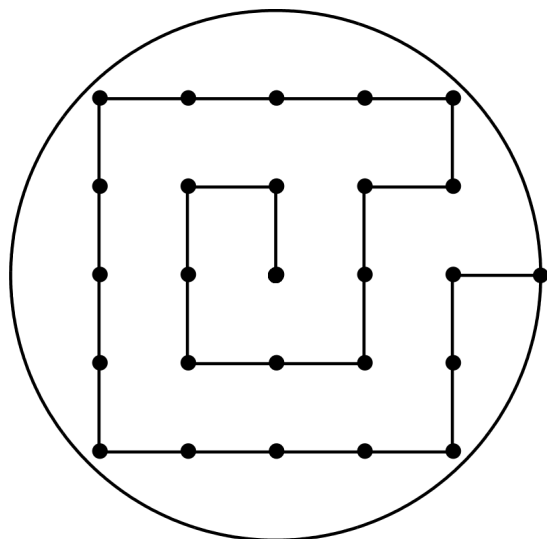
lahenditena. Järelikult tulevad juhul $a < 2$ lahenditena kõne alla ainult $x_1 = a - 1$, $y_1 = 1$ ja $x_2 = \frac{a + 1}{3}$, $y_2 = \frac{2a - 1}{3}$.

Kontroll kinnitab, et juhtudel $a = 2$ ja $a < 2$ on toodud lahendikandidaadid tõepoolest lahendid.

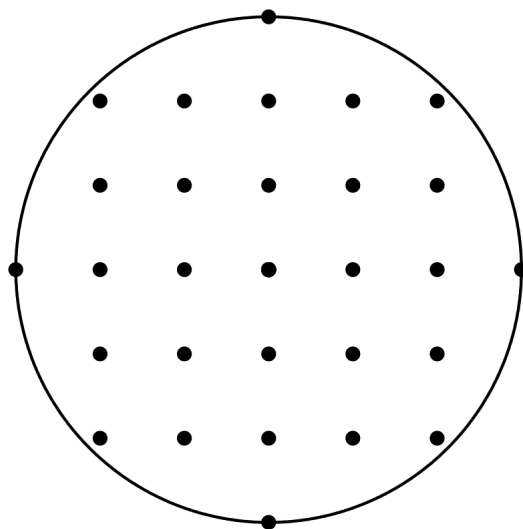
541222 lahendus

10 punkti

Joonisel L 541222 a kujutatud voltmao pikkus on 25 ja ta asub, nagu ülesande tingimused nõuavad, puuris raadiusega 3. Järgnevalt tõestame, et ühtegi pikemat madu puuri ära paigutada ei saa.



L 541222 a



L 541222 b

Selleks paneme kõigepealt tähele, et mao esimese lõigu suuna võib puuri pöördsümmeetrilisuse tõttu valida suvaliselt. Seetõttu võime eeldada, et mao pea asub ristkoordinaadistiku koordinaatide alguspunktis ja esimese lõigu lõpp punktis $(0, 1)$. Voltimistingimuse tõttu asuvad siis kõigi lõikude lõpp-punktid täisarvuliste koordinaatidega punktides (x, y) .

Lihtsa arvutuse teel Pythagorase teoreemi abil veendume nüüd kergesti, et puuri sisemuses või äärel asuvad parajasti joonisel L 541222 b kujutatud 29 võrepunkti. Täpselt neli neist asuvad äärel.

Igähte neist 29 võrepunktist võib madu sattuda ülimalt ühe korra. Kuid neljast puuri äärel asuvast võrepunktist saab ta jõuda ülimalt ühte (oma otsaga), sest igäiks neist neljast punktist asub ainult ühest muust võrepunktist kaugusel 1 ja seetõttu moodustab sellises punktis lõppev lõik tupiku. Seepärast ei saa mao läbitavate võrepunktide arv olla suurem kui $29 - 4 + 1 = 26$. Vastavalt ei ole mao pikkus suurem kui $26 - 1 = 25$.

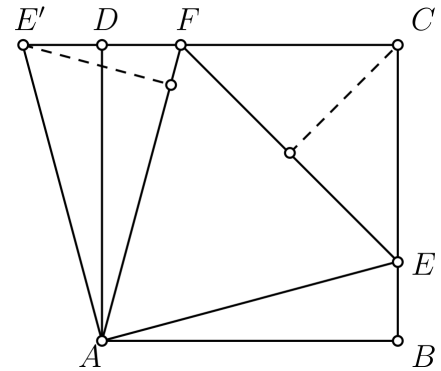
541223 lahendus

10 punkti

Esimene lahendus.

Pöörame kõigepealt kolmnurka ABE ümber punkti A nii, et lõik \overline{AB} teiseneb lõiguks \overline{AD} . Sellega teiseneb punkt E punktiks E' , mis tippude B ja D juures asuvate täisnurkade tõttu paikneb lõigu \overline{CD} pikendusel üle punkti D , vt joonist L 541223 a.

Tõestada tuleb, et kolmnurkade AFE' ja ECF pindalad on võrdsed. Võrduse $|AF| = |EF|$ tõttu on see samaväärne tõestamisega, et tippudest E' ja C vastavalt külgedele \overline{AF} ja \overline{EF} tõmmatud kõrgused on sama pikkusega.



L 541223 a

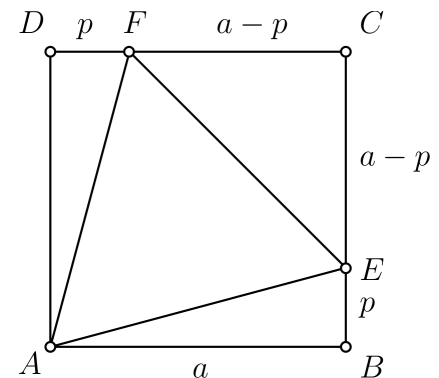
Et kolmnurk AEF on võrdkülgne, on kolmurgad ABE ja AFD võrdsed tunnuse KNK tõttu, sest nad ühtivad täisnurga, kaateti ja hüpotenuusi poolest. Seetõttu $|DF| = |BE|$. Seega on $\triangle ECF$ võrdhaarne täisnurkne kolmnurk alusega \overline{EF} . Järelikult $|\angle EFC| = 45^\circ$ ning kõrguse pikkus on $\frac{1}{2} \cdot |EF|$.

Küljele \overline{AF} tõmmatud kõrgus ja külj $\overline{AE'}$ moodustavad koos lõigu \overline{AF} vastava osaga täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiga $\overline{AE'}$. Et $|\angle EAF| = 60^\circ$, siis $|\angle FAE'| = 30^\circ$. Seega on küljele \overline{AF} tõmmatud kõrguse pikkus $|AE'| \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}|AE'|$.

Et $|AE'| = |AE| = |EF|$, siis on mõlemad vaadeldavad kõrgused sama pikad ning pindalade võrdsus on tõestatud.

Teine lahendus.

Kui kolmnurk AEF on võrdkülgne, siis on kolmurgad ABE ja AFD võrdsed tunnuse KNK põhjal, sest nad ühtivad täisnurga, kaateti ja hüpotenuusi poolest. Kui tähistada lõikude \overline{AB} ja \overline{BE} pikkusi vastavalt tähtedega a ja p , on ka $|DF| = p$, seega $|CE| = |CF| = a - p$, vt joonist L 541223 b. Täisnurksete kolmnurkade ECF , ABE ja AFD pindalade jaoks kehtib



L 541223 b

$$S(\triangle ECF) = \frac{1}{2}(a - p)^2, \quad S(\triangle ABE) = S(\triangle AFD) = \frac{1}{2}ap. \quad (1)$$

Et kolmnurga AEF küljed \overline{AE} ja \overline{EF} on sama pikad, siis saame Pythagorase teoreemist täisnurksete kolmnurkade ECF ja ABE kohta järk-järgult

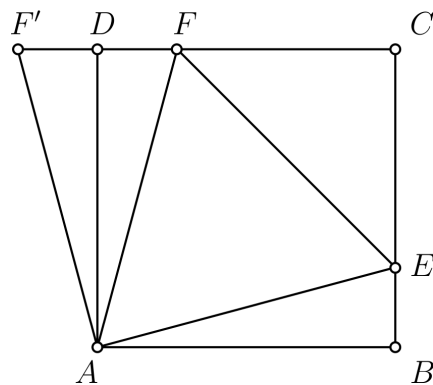
$$\begin{aligned} 2(a - p)^2 &= |EC|^2 + |CF|^2 = |EF|^2 = |AE|^2 = a^2 + p^2, \\ 2a^2 - 4ap + 2p^2 &= a^2 + p^2, \\ a^2 - 2ap + p^2 &= 2ap, \\ (a - p)^2 &= 2ap, \end{aligned}$$

millest võrduste (1) tõttu järeldubki väide.

Kolmas lahendus.

Kui kolmnurk AEF on võrdkülgne, siis on kolmurgad ABE ja AFD võrdsed tunnuse KNK põhjal, sest nad ühtivad täisnurga, kaateti ja hüpotenuusi poolest. Kolmnurk ECF on seega võrdhaarne ja täisnurkne ning $|\angle BAE| = |\angle FAD| = 15^\circ$.

Olgu F' punktiga F sümmeetriline punkt sirge AD suhtes, vt joonist L 541223 c. Siis on kolmurgad AFD ja ADF' võrdsed. Kolmnurga AFF' pindala võrdub järelikult kolmnurkade ABE ja AFD pindalade summaga. Kui s tähistab võrdkülgse kolmnurga AEF küljepikkust, siis kehtib



L 541223 c

$$\begin{aligned} S(\triangle ABE) + S(\triangle AFD) &= S(\triangle AFF') = \frac{1}{2} |AF| \cdot |AF'| \cdot \sin |\angle FAF'| \\ &= \frac{1}{2} s \cdot s \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} s^2. \end{aligned}$$

Võrdhaarses täisnurkses kolmurgas ECF on kaatetite pikkused $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s$. Seega kehtib

$$S(\triangle ECF) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s \right)^2 = \frac{1}{4} s^2.$$

Sellega on pindalade võrdsus tõestatud.

541224 lahendus

10 punkti

Esimene lahendus. Selline esitus leidub kõigi positiivsete täisarvude $n \neq 2$ jaoks, kuid mitte $n = 2$ jaoks.

Juhul $n = 1$ rahuldab ülesande tingimusi $a_1 = 1$.

Juhul $n = 2$ võib ilma üldisust kitsendamata eeldada, et $a_1 < a_2$. Kui $a_1 = 1$, siis kehtib võrratus $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} > 1$; kui aga $2 \leq a_1 < a_2$, siis $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Juhul $n \geq 3$ valime

$$a_k = \begin{cases} 2^k, & 1 \leq k \leq n-2, \\ 3 \cdot 2^{k-2}, & n-1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Siis saame $s = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ jaoks

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}},$$

seega järelikult

$$2s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-4}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}}$$

ning

$$\begin{aligned} s = 2s - s &= 1 & -\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-4}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} \\ &= 1 + \frac{-3 + 4 - 1}{3 \cdot 2^{n-2}} = 1. \end{aligned}$$

Seega on niisuguse valiku korral ülesande tingimused täidetud.

Teine lahendus. Selline esitus on olemas kõigi positiivsete täisarvude $n \neq 2$ ja ainult nende jaoks. Eeldame järgnevas ilma üldisust kitsendamata, et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Kui $n = 1$, siis lahendab ülesande $a_1 = 1$.

Kui $n = 2$, siis juhul $a_1 = 1$ kehtib võrratus $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} > 1$, samas kui juhul $2 \leq a_1 < a_2$ kehtib $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Kui $n = 3$, siis $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$; kui aga $n = 4$, siis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$.

Suuremate n -de jaoks järeldub sellise esituse olemasolu matemaatilise induktsiooni printsiibi abil.

1. variant, samm $n \rightarrow n + 2$. Asendades arvu a_n arvuga $a'_n = 2a_n$ ja valides $a_{n+1} = 3a_n$ ning $a_{n+2} = 6a_n$, kehtivad seoste $1 < a_{n-1} < a_n$ tõttu võrratused $a_{n-1} < a'_n = 2a_n < a_{n+1} = 3a_n < a_{n+2} = 6a_n$ ning saame

$$1 = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a'_n} + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}.$$

Seega kui leidub sobiv esitus n arvu jaoks, siis leidub selline esitus ka $n + 2$ arvu jaoks. Et $n = 3$ ja $n = 4$ korral need esitused leiduvad, siis leiduvad nad iga $n \geq 3$ korral.

2. variant, samm $n \rightarrow n + 1$. Asendades arvu a_n arvuga $a'_n = a_n + 1$ ja valides $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, kehtib seoste $1 \leq a_{n-1} < a_n$ põhjal võrratuste ahel $a_{n-1} < a'_n = a_n + 1 < a_{n+1} = a_n + a_n^2$ ning saame

$$\frac{1}{a_n} = \frac{a_n + 1}{a_n(a_n + 1)} = \frac{a_n}{a_n(a_n + 1)} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)} = \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a'_n} + \frac{1}{a_{n+1}},$$

see tähendab,

$$1 = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a'_n} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Seega kui leidub sobiv esitus n arvu jaoks, siis leidub selline esitus (olulisel eeldusel $a_n > 1$) ka $n + 1$ arvu jaoks. Et $n = 3$ korral esitus leidub, siis leiduvad sellised esitused iga $n \geq 3$ korral.

Hindamisskeemid

Iga üksiku *ülesande* eest ette nähtud punktide arv on kohustuslik, et oleks võimalik teha võrdlusi, nt otsustada 3. vooru (maakonnavooru) pääsemise üle.

Õpilase lahenduskäigu üksikute *sammude* eest antavate punktide arv on hindaja otsustada (järgides põhimõtet „sammu kasutatavus sihile viivas lahenduskäigus“); õpilase lahenduse hindamisel tuleks võimaluse korral rakendada järgnevaid punktijaotusi, neid võib selles mõttes üksikutel juhtudel ka muuta.

Ülesanne 541221

Kokku: 10 punkti

Lähenedamine juhtude vaatlemise kaudu	2 punkti
Lahendikandidaatide leidmine juhul $a < 2$	2 punkti
Lahendikandidaatide leidmine juhul $a = 2$	2 punkti
Lahendite välistamine juhul $a > 2$	2 punkti
Leitud lahendikandidaatide lahendiks sobivuse tõestamine (tavaliselt kontrollimise teel)	2 punkti

Ülesanne 541222

Kokku: 10 punkti

Ühe pikkusega 25 voltmao esitamine	2 punkti
Tõestamine, et pikkus 25 on maksimaalne	8 punkti
Sealhulgas	
Arusaamine, et piisab võrepunktide vaatlemisest	1 punkt
Arusaamine, et leidub 29 võrepunkti, millest 4 asuvad äärel	2 punkti
Põhjenduskäigu veenev teostus	5 punkti

Ülesanne 541223

Kokku: 10 punkti

Kolmnurkade $\triangle ABE$ ja $\triangle AFD$ võrdsus	2 punkti
Väide, et $\triangle ECF$ on võrdhaarne ja täisnurkne	2 punkti
Lähenedamine nurgaseoste või Pythagorase teoreemi kaudu	2 punkti
Arvutused ja väite järeldamine	4 punkti

Ülesanne 541224

Kokku: 10 punkti

Arutus ja lahendus $n = 1$ jaoks	1 punkt
Arutus ja tõestus, et $n = 2$ puhul lahendeid ei leidu	3 punkti
Arvude a_k andmine	2 punkti
Tõestus, et antud arvud a_k rahuldavad tingimusi	3 punkti
Väide, et nõutud esitus leidub kõigi positiivsete täisarvude $n \neq 2$ ja ainult nende jaoks	1 punkt